Caracterizacões Variacionais do Primeiro Autovalor do Laplaciano e do p-Laplaciano em Variedades Riemannianas

Orientador: Barnabé Pessoa Lima
Orientando: Bruno Vasconcelos Mendes Vieira

1 Introdução

O operator p-Laplaciano $\Delta_p(f) = div(|\ \nabla f\ |^{p-2}\ \nabla f)$ é uma generalização natural do Laplaciano, pois quando $p = 2$ coincide com o operador laplaciano e, assim como o laplaciano, aparece em vários modelos físicos, relacionados com a dinâmica dos fluidos, no estudo do fluxo através de meios poroso, elasticidade não linear e glaciologia. Por esta razão, vem-se tentando estender os resultados relativos ao operador laplaciano para o p-laplaciano, tais como, estimativas do primeiro autovalor, o qual possui uma caracterização variacional que generaliza naturalmente a caracterização do primeiro autovalor do laplaciano. Um dos objetivos deste projeto é entender resultados clássicos relacionados com o espectro do laplaciano e usar métodos variacionais para obter extenção dos mesmos para o p-laplaciano, isso dentro do contexto da Geometria Riemanniana.

2 Metodologia

As atividades deste projeto foram desenvolvidas com o aluno lendo: Livros, artigos, dissertações de mestrado e doutorado que tratam do estudo de autovalores assim como do espectro de operadores diferenciais, especialmente sobre o laplaciano e o p-laplaciano, além disso consultando diariamente a internet sobre o tema. A prestação de contas ao orientador, ocorre semanalmente, através de exposição oral e, nesta ocasião acontece, sempre que for necessário, arguição visando dirimir eventuais dúvidas existentes. O bolsista, além dos recursos humanos disponíveis no Departamento de Matemática da UFPI utilizou materiais de consumo, tais como (pincel, apagador, quadro acrílico, papel, caneta, etc), as referências bibliográficas [3] e [2] foram as mais usadas para o desenvolvimento do projeto.

3 Resultados

Nos primeiros seis meses de desenvolvimento do projeto, a bolsista estudou a teoria de autovalores de operadores simétricos em espaços e dimenção finita, dando ênfase às suas diversas caracterizações variacionais, tais como:

Dado um operador linear simétrico $A : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$, sabemos de um primeiro curso de Algebra Linear, que A é diagonalizável e se ordenarmos o conjunto dos autovalores de A em ordem crescente, $\lambda_1 \leq, \ldots, \leq \lambda_n$ e neste caso dizemos que λ_1 é chamado o primeiro autovalor do operador A, temos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrado em [2], a qual nos fornece uma caracterização variacional para λ_1 do operator simetrico A.

Teorema 1. *Se λ_1 é o primeiro autovalor de um operador linear e simétrico $A : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ então para todo $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vale a desigualdade:*

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle Ax, x\rangle}{\mid x \mid^2}$$

Além disso, a igualdade ocorre, se e, somente se, x é um autovetor associado a λ_1.

Também foram estudados nos primeiro seis meses, tópicos de geometria diferencial, dando se ênfase ao cálculo em superfícies do $\mathbb{R}^3$.

Os últimos seis meses foram dedicados ao cálculo em variedades riemannianas, as generalizações do Teorema 1 para o Laplaciano e o p-laplaciano em dominios compactos de uma variedade riemanniana, tendo como meta principal a caracterização variacional do primeiro autovalor do Laplaciano e do p-Laplaciano, resultados contidos nos teoremas enunciados a seguir:

Teorema 2. *Se λ_1 é o primeiro autovalor do laplaciano em um dominio Ω então para toda $f \in C_0^\infty(\Omega) - \{0\}$ vale a desigualdadade:*

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Omega (-\Delta f).f d\Omega}{\int_\Omega f^2 d\Omega} = \frac{\int_\Omega \mid \nabla f \mid^2 d\Omega}{\int_\Omega f^2 d\Omega}$$

Diferentemente do Laplaciano quando p é diferente de 2, o p-Laplaciano não é linear, mas mesmo assim existe uma adaptação para se estimar o infimo dos autovalores do p-Laplaciano Dizemos que uma função f, não nula, é uma autofunção do p-Laplaciano em um domínio limitado Ω, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\Delta_p f + \lambda \mid \nabla f \mid^{p-2} \nabla f = 0$$

Este operador aparece naturalmente no problema variacional associado ao funcional energia $Ep : W_0^p(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ definido por: $E_p(f) = \int_\Omega \mid \nabla f \mid^2 d\Omega$ onde $W_0^p(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\mid f \mid_{1p}^p = \int_\Omega \mid f \mid^p d\Omega + \int_\Omega \mid \nabla f \nabla^p d\Omega$

Neste caso temos que o conjunto dos autovalores do p-Laplaciano é um subconjunto do intervalo $[0, +\infty)$ e um teorema similar ao Teorema 2

Teorema 3. *Se λ_1^p é o primeiro autovalor do p-Laplaciano em um dominio Ω então para toda $f \in C_0^\infty(\Omega) - \{0\}$ vale a desigualdadade:*

$$\lambda_1^p \leq \frac{\int_\Omega \mid \nabla f \mid^p d\Omega}{\int_\Omega f^p d\Omega}$$

Usamos os Teoremas 2 e 3 para estudar a caracterização através de campos de vetores do primeiro autoavalor do Laplaciano e do p-Laplaciano respectivamente.

4 Conclusão

Durante a execução deste projeto, destacamos o desenvolvimento pessoal do bolsista de iniciação científica. Visto que o bolsista teve que assimilar grande quantidade de informações, o que veio somar no seus estudos acadêmicos. Como prova disso, ressaltamos o ótimo desempenho que o aluno vem obtendo nas disciplinas cursadas na graduação, como também ter sido aprovado na seleção para ingressar no Mestrado Acadêmico de Matemática da UFPI em agosto de 2012.

Palavras chaves: Autovalor p-Laplaciano, Espectro de Operadores

Referências

[1] Bérard, P. - *Analysis on Riemannian Manifolds and Geometric Applications: An Introduction.* Monografias 42 IMPA, Rio de Janeiro (2008).

[2] Bérard, P. - *An Elementary Introduction to Eigenvalue Problems with an application to catenoids in* $\mathbb{R}^3$. *XV* Escola de Geometria Diferencial, IMPA (2008).

[3] do Carmo, M. P. - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Coleção Textos Universitários - IMPA. Rio de Janeiro, 2005. Dissertação de Mestrado, UFPI, (2010).

[4] Lima, Barnabé P. and Santos, Newton, L. -*A Theoem of DoCarmo-Zhou Type: Oscillations and Estimates for the First Eigenvalue of the p-Laplacian* Results Math. 60 (2011), 507-517.

[5] Lima, Barnabe, P., Santos, Newton L. and Montenegro, José, F, B. - *Eigenvalue estimates for the p-laplace operator on manifolds.* Nonlinear Analysis, 72 (2010), 771-781.

[6] Silva, Antonio,K, V. - *O Primeiro Autovalor do p-Laplaciano em Variedades.* Dissertação de Mestrado, UFPI, (2011).